פתרון תרגיל

סדרות כלליות – תרגילים עם כלל הנסיגה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 187, ת. 19

המצגת נערכה ע"י **שירי דוברין**

השאלה

19) האיבר הכללי של סדרה הוא $a_n = bn^2 + cn$.

הסדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + 4n - 3$.

א. מצא את b ו-c.

ב. מגדירים סדרה חדשה b_n שמקיימת $b_n = \frac{a_n - 18}{n+2}$.

מצא את n עבורו מתקיים: $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 273$.

האיבר הכללי של סדרה הוא $a_n = bn^2 + cn$.

הסדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + 4n - 3$. א. מצא את b ו-c.

פתרון

עפ"י נוסחת האיבר הכללי:

$$a_{n+1} = b(n+1)^2 + c(n+1) = bn^2 + 2bn + b + cn + c$$

עפ"י כלל הנסיגה:

$$a_{n+1} = a_n + 4n - 3 = bn^2 + cn + 4n - 3$$

האיבר הכללי של סדרה הוא $a_n = bn^2 + cn$.

הסדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + 4n - 3$. א. מצא את b ו-c.

פתרון

$\Downarrow$

$$bn^2 + 2bn + b + cn + c = bn^2 + cn + 4n - 3$$

$$2bn + b + c = 4n - 3$$

השוואת מקדמים:

$$b + c = -3 \qquad 2b = 4$$

האיבר הכללי של סדרה הוא $a_n = bn^2 + cn$.

הסדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + 4n - 3$. א. מצא את b ו-c.

פתרון

השוואת מקדמים:

$$b + c = -3 \qquad\qquad 2b = 4$$

$$2 + c = -3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = 2}$$

$$\mathbf{c = -5}$$

ב. מגדירים סדרה חדשה b_n שמקיימת $b_n = \frac{a_n - 18}{n+2}$. מצא את n עבורו מתקיים:
$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 273$.

פתרון

נאפיין את הסדרה b_n

$$b_n = \frac{a_n - 18}{n+2} = \frac{2n^2 - 5n - 18}{n+2}$$

נחלק בין הפולינומים:

ב. מגדירים סדרה חדשה b_n שמקיימת $b_n = \frac{a_n-18}{n+2}$. מצא את n עבורו מתקיים: $b_1+b_2+\ldots+b_n = 273$.

פתרון

$$2n \quad -9$$

$$2n^2 - 5n - 18 \;\Big|\; n+2$$

$$-\quad 2n^2 + 4n$$

$$-9n - 18$$

$$-\quad -9n - 18$$

$$0$$

ב. מגדירים סדרה חדשה b_n שמקיימת $b_n = \frac{a_n - 18}{n+2}$. מצא את n עבורו מתקיים: $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 273$.

פתרון

$$b_n = 2n - 9$$

נוכיח כי הסדרה b_n חשבונית:

$$b_{n+1} - b_n = 2(n+1) - 9 - (2n - 9) = 2$$

ב. מגדירים סדרה חדשה b_n שמקיימת $b_n = \frac{a_n - 18}{n+2}$. מצא את n עבורו מתקיים:
$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 273$.

פתרון

עפ״י סכום סדרה חשבונית:

$$S_{b_n} = \frac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d_b]$$

$$b_1 = 2 \cdot 1 - 9 = -7$$

$$d_b = 2$$

ב. מגדירים סדרה חדשה b_n שמקיימת $b_n = \frac{a_n - 18}{n+2}$. מצא את n עבורו מתקיים:
$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 273$.

פתרון

נדרוש:

$$S_{b_n} = \frac{n}{2}[2 \cdot (-7) + (n-1)2] = 273$$

$$n[-7 + (n-1)] = 273$$

$$n^2 - 8n = 273$$

ב. מגדירים סדרה חדשה b_n שמקיימת $b_n = \frac{a_n - 18}{n+2}$. מצא את n עבורו מתקיים:
$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 273$.

פתרון

$$n^2 - 8n - 273 = 0$$

באמצעות נוסחת השורשים: $n = 21 \ , \qquad n = -13$

עפ"י ההגדרה, n טבעי. $n = 21$

בהצלחה